Die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Ellipse, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihre vertikale große Achse rotiert.

Eine Anwendung hyperelliptischer Integrale dritter Gattung vom Geschlecht $p = 2$.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Hermann Uchtmann
aus Bremen-Burg.

MARBURG 1929
Buchdruckerei von Joh. Hamel

Als Dissertation angenommen am 15. Mai 1929.

Berichterstatter: Prof. Dr. Neumann.

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Mai 1929.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Einige dem vorliegenden sehr nahestehende Probleme sind schon mehrfach behandelt worden. Als analog in der Problemstellung seien erwähnt: Thomae, die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Ellipse (Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Funktionen gebraucht werden, Halle 1876); Schleiermacher, über die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid und ultraelliptische Integrale dritter Gattung (Diss. Erlangen 1878). Bungers untersucht in seiner Dissertation (Halle-Wittenberg 1902) die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kegelschnitt, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine vertikale Hauptachse rotiert. Die im Folgenden gelöste Aufgabe ist in der Bungersschen Dissertation nur qualitativ erledigt; außerdem sind die Methoden, die in beiden Arbeiten angewandt werden, ganz voneinander verschieden: Bungers gewinnt mit Hilfe einer von Henneberg herrührenden geometrischen Methode ein Bild der verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten und behandelt nur Spezialfälle auch analytisch, hier dagegen wird mit Hilfe der Theorie der hyperelliptischen Integrale eine erschöpfende, rein analytische Behandlung des vorgelegten Problems gegeben. Spezialfälle werden nicht untersucht, da der interessanteste von ihnen schon früher, u. a. in der Dissertation von Schad: das Zentrifugalpendel (Gießen 1911) seine Bearbeitung gefunden hat.

Literaturverzeichnis.

Neben der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. II_2, Krazer und Wirtinger: Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen, wurden hauptsächlich benutzt:

v. Braunmühl: Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiachsigen Flächen zweiten Grades, Math. Annalen Bd. 20.

Brill: Ueber diejenigen Kurven, deren Koordinaten sich als hyperelliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen, Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 65.

König und Krafft: Elliptische Funktionen, Berlin und Leipzig 1928.

Krause: Die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung, Leipzig 1886.

Krazer: Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel, Leipzig 1882.

Merten: Die Umkehrung der ultraelliptischen Integrale erster Ordnung und ihre Anwendung auf ein Problem der Mechanik, Diss. Marburg 1911.

Neumann, C.: Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 1. Auflage, Leipzig 1865.

Prym: Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen, 2. Ausgabe, Berlin 1885.

Richelot: De integralibus Abelianis primi ordinis comm. prima, Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 12.

Roch: Ueber die dritte Gattung der Abelschen Integrale erster Ordnung, Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 65.

Rosenhain: Abhandlung über die Funktionen zweier Variabler mit vier Perioden, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 65.

Schirdewahn: Ueber das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale dritter Gattung und erster Ordnung, Diss. Breslau 1886.

Schleiermacher: Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Rotationsellipsoid und ultraelliptische Integrale dritter Gattung, Diss. Erlangen 1878.

Staude: Ueber hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung, Acta Mathematica Bd. 8.

Thomae: Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Funktionen gebraucht werden, Halle 1876.

Zitiert werden im Folgenden die Werke mit den Namen ihrer Verfasser.

I.

Problemstellung, Aufstellung der Bewegungsgleichungen und ihre Integration.

Das rechtwinklige Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O und den Achsen ξ, η, ζ habe mit einem rechtwinkligen x-y-z-System den Punkt O und die z-Achse gemeinsam. Das ξ-η-ζ-System rotiere mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω um die $z = \zeta$-Achse. Zur Zeit $t = 0$ seien beide Koordinatensysteme identisch.

In der ξ-ζ-Ebene sei eine Ellipse fest verankert, ihr Mittelpunkt liege im Anfangspunkt O beider Koordinatensysteme. Die große Hauptachse b der Ellipse habe die Richtung der ζ-Achse, die vertikal gestellt sei, die kleine a die der ξ-Achse.

Die Gleichung der Ellipse sei

1) $$\xi = a \cos \varphi, \quad \zeta = b \sin \varphi,$$

wobei der Parameter φ die exzentrische Anomalie der Ellipse bedeutet.

Die Koordinaten eines Punktes P der Ellipse in dem x-y-z-System sind dann

2) $$x = a \cos \varphi \cos \omega t, \quad y = a \cos \varphi \sin \omega t, \quad z = b \sin \varphi.$$

Ermittelt werden soll die Bewegung des materiellen Punktes P, der auf der rotierenden Ellipse frei beweglich, aber der Schwere unterworfen ist, die in Richtung der z-Achse wirkt.

Die Bewegung läßt sich erkennen aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art. Sei L die kinetische, K die potentielle Energie des Punktes P. Dann ist, wenn g die Schwere bedeutet:

3) $$L = \frac{1}{2}(\dot{x}+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}\left\{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)\,\dot{\varphi}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \varphi\right\}$$

4) $$K = -\,gb \sin \varphi.$$

Und das liefert wegen

$$-\frac{\partial L}{\partial \varphi}+\frac{\partial K}{\partial \varphi}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0$$

die Beziehung:

5′) $-\frac{1}{2}[(a^2-b^2)\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}^2 - a^2\omega^2\sin 2\varphi] - gb\cos\varphi$
$+(a^2-b^2)\sin 2\varphi\,\dot{\varphi}^2+(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,\ddot{\varphi}=0$

Die Masse des Punktes P ist dabei gleich 1 gesetzt, was unbeschadet der Allgemeinheit des Problems geschehen kann, und mit $\dot{\varphi}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ bezw. $\ddot{\varphi}$ sind wie üblich die ersten bezw. zweiten Differentialquotienten von φ, x, y, z nach t bezeichnet.

Die Differentialgleichung 5′) hat den Multiplikator $2\dot{\varphi}$. Eine einmalige Integration ergibt:

5) $(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}a^2\omega^2\cos 2\varphi - 2gb\sin\varphi = \text{const} = A.$

Sind die Anfangsbedingungen so gewählt, daß

6) zur Zeit $t=0$: $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$,

so hat A den Wert

5″) $A=(a^2\sin^2\varphi_0+b^2\cos^2\varphi_0)\dot{\varphi}_0^2-\frac{1}{2}a^2\omega^2+a^2\omega^2\sin^2\varphi_0-2gb\sin\varphi_0.$

Aus der Gleichung 5) folgt:

7) $$dt = \pm\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)(A+\frac{1}{2}a^2\omega^2-a^2\omega^2\sin^2\varphi+2gb\sin\varphi)}},$$

wobei von den zwei vor der Quadratwurzel stehenden Vorzeichen bei positivem $d\varphi$ das positive, bei negativem $d\varphi$ das negative zu wählen ist.

Setzt man in 7)

8) $$\sin\varphi=\psi\ ,\quad d\varphi=\frac{d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}\ ,$$

so kommt:

9) $$dt = \pm\frac{\{(a^2-b^2)\psi^2+b^2\}\,d\psi}{\sqrt{(1-\psi^2)((a^2-b^2)\psi^2+b^2)(A+\frac{1}{2}a^2\omega^2-a^2\omega^2\psi^2+2gb\psi)}}.$$

Für ψ gilt von vornherein die Beschränkung

8′) $$-1\leqq\psi\leqq 1.$$

Daher sind

$$1-\psi^2 \text{ und } b^2-(b^2-a^2)\psi^2$$

stets nichtnegativ. Damit das Problem eine physikalische Bedeutung behält, muß für ψ aus dem Intervall 8′) auch

$$\Psi\equiv A+\frac{1}{2}a^2\omega^2+2gb\psi-a^2\omega^2\psi^2\geqq 0$$

sein. Für sehr große positive wie negative ψ ist Ψ sicher kleiner als Null. Ψ ist daher positiv zwischen den Nullstellen M und N

der quadratischen Gleichung $\Psi = 0$. Ψ läßt sich schreiben in der Form

$$\Psi = -a^2\omega^2\{\psi - M\}\{\psi - N\},$$

wobei

$$M = \frac{2gb + \sqrt{4g^2b^2+4a^2\omega^2A+2a^4\omega^4}}{2a^2\omega^2},$$

$$N = \frac{2gb - \sqrt{4g^2b^2+4a^2\omega^2A+2a^4\omega^4}}{2a^2\omega^2}.$$

M und N sind reell, denn es ist

$$\begin{aligned} &4g^2b^2+4a^2\omega^2A+2a^4\omega^4 \\ &= 4g^2b^2+4a^2\omega^2(a^2\sin^2\varphi_0+b^2\cos^2\varphi_0)\dot{\varphi}_0^2 - 2a^4\omega^4 \\ &\quad + 4a^4\omega^4\sin^2\varphi_0 - 8a^2\omega^2gb\sin\varphi_0 + 2a^4\omega^4 \\ &= (2gb - 2a^2\omega^2\sin\varphi_0)^2 + 4a^2\omega^2(a^2\sin^2\varphi_0+b^2\cos^2\varphi_0)\dot{\varphi}_0^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

M ist die größere der beiden Wurzeln von $\Psi = 0$. Damit also Ψ nichtnegativ sei, muß

$$M - \psi \geqq 0 \ , \ \psi - N \geqq 0$$

sein, d. h. für ψ ergibt sich die weitere Beschränkung

8″) $$N \leqq \psi \leqq M.$$

M und N können im Wesentlichen beliebige reelle Werte haben. Nur ist sicher $M > 0$ und $M \geqq |N|$. Und außerdem muß, damit die beiden Intervalle

$$\{-1, +1\} \text{ und } \{N, M\}$$

nicht ganz voneinander verschieden sind,

$$N \leqq 1$$

sein. Diese hier als notwendig erkannte Bedingung ist von selbst erfüllt. Angenommen nämlich, es wäre $N > 1$. Dann wäre

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= A - \frac{1}{2}a^2\omega^2 + 2gb \\ &= (a^2\sin^2\varphi_0+b^2\cos^2\varphi_0)\dot{\varphi}_0^2 - a^2\omega^2(1-\sin^2\varphi_0) \\ &\quad + 2gb\,(1-\sin\varphi_0) < 0 \end{aligned}$$

und damit auch

$$2gb - a^2\omega^2(1+\sin\varphi_0) < 0,$$

also a fortiori

$$2gb - 2a^2\omega^2 < 0$$

oder

$$\frac{gb}{a^2\omega^2} = \frac{M+N}{2} < 1.$$

Das kann aber nicht sein, da nach Voraussetzung N und somit auch M größer als 1 sein sollen. Die Voraussetzung $N>1$ ist also unzulässig, da sie auf einen Widerspruch führt.

Für 9) läßt sich auch schreiben:

$$10)\quad dt=\pm\frac{b}{a\omega}\frac{(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)d\psi}{\sqrt{(1-\psi)(1+\psi)(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)(\psi-N)(M-\psi)}},$$

wenn mit ε die numerische Exzentrizität der Ellipse

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$

bezeichnet wird.

Für die Nullstellen des Polynoms unter der Wurzel in 10) ergeben sich folgende, allein möglichen Anordnungen:

$$11)\quad\begin{cases}
\text{I. }\alpha\colon -\frac{1}{\varepsilon}<-1<N\leqq M\leqq 1<\frac{1}{\varepsilon},\\
\text{I. }\beta\colon -\frac{1}{\varepsilon}<-1\leqq N\leqq 1<M\leqq\frac{1}{\varepsilon},\\
\text{I. }\gamma\colon -\frac{1}{\varepsilon}<-1\leqq N<1<\frac{1}{\varepsilon}<M,\\
\text{II. }\alpha\colon N\leqq-\frac{1}{\varepsilon}<-1<1<\frac{1}{\varepsilon}<M,\\
\text{II. }\beta\colon -\frac{1}{\varepsilon}<N<-1<1<\frac{1}{\varepsilon}\leqq M,\\
\text{II. }\gamma\colon -\frac{1}{\varepsilon}<N<-1<1<M<\frac{1}{\varepsilon}.
\end{cases}$$

In den Fällen I wird P auf der rotierenden Ellipse hin- und herpendeln. Denn dann wird gemäß 7)

$$\frac{d\varphi}{dt}=0$$

wenigstens für $\psi=N$. Im Falle Iα sind $\psi=M$ und $\psi=N$ Rückkehrpunkte von P; zwischen M und N pendelt P. Da jedem ψ zwei supplementäre φ entsprechen, so wird es von dem Anfangswert φ_0 abhängen, auf welchem der beiden in Fig. 1 punktierten Bogenstücke der Ellipse die Bewegung von P vor sich geht. In den Fällen Iβ und Iγ pendelt P zwischen

$$\varphi=\arcsin N \text{ und } \varphi=\pi-\arcsin N$$

(vergl. Fig. 2). In den Fällen II ist die Geschwindigkeit von P auf der Ellipse für kein ψ gleich Null. In diesen Fällen durchläuft

also P die Ellipse — mit allerdings variabler, aber nie verschwindender Geschwindigkeit — stets in einer Richtung, nämlich der, die durch die Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist. Wie sich

Fig. 1

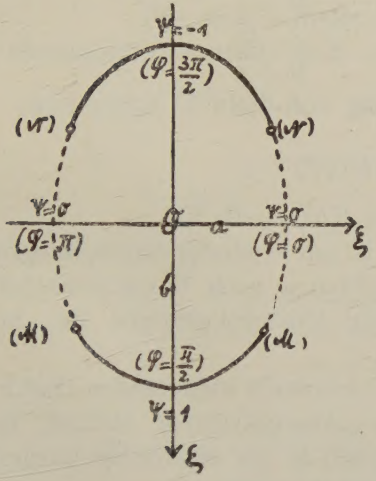
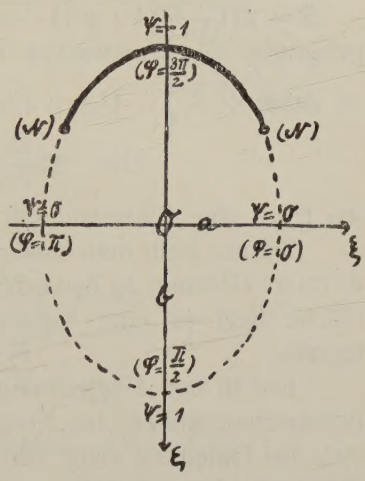


Fig. 2



P in den Grenzfällen $N = -1$ und $M = +1$ bewegt, bleibt unbestimmt.

Durch Integration von 10) kommt

$$12)\quad t = \pm \frac{b}{a\omega} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-\psi)(1+\psi)(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)(M-\psi)(\psi-N)}},$$

wenn ψ_0 dem φ_0 entspricht.

Der Zusammenhang zwischen t und ψ und damit der zwischen t und φ ist dadurch hergestellt und zwar in Form eines hyperelliptischen Integrals. Das Integral ist vom Geschlecht $p = 2$. Ist daher im Folgenden einfach die Rede von hyperelliptischen Integralen, so sind stets solche vom Geschlecht $p = 2$ gemeint.

Um die Gattung des Integrals 12) festzustellen, hat man das Verhalten des Differentials

$$\mathfrak{D} = \frac{(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-\psi)(1+\psi)(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)(M-\psi)(\psi-N)}},$$

unter ψ eine auch komplexer Werte fähige Variable verstanden, in der Umgebung der Stelle $\psi=\infty$ zu untersuchen. $\psi=\infty$ ist kein Verzweigungspunkt der zu der Quadratwurzel

$$S = \sqrt{(1-\psi)(1+\psi)(1-\varepsilon\psi)(1+\varepsilon\psi)(M-\psi)(\psi-N)}$$

gehörigen Riemannschen Fläche. Eine Ortsuniformisierende[1]) ist daher $\psi' = \frac{1}{\psi}$. Durch Einführung von ψ' in $\mathfrak{D}$ ergibt sich:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\psi'} \cdot E(\psi')\,d\psi',$$

wo $E(\psi')$ eine Einheitsfunktion (mit $E(0) \neq 0$) ist.

Daraus sieht man sofort: 12) ist ein hyperelliptisches Integral dritter Gattung. In den beiden Punkten ∞ jener Riemannschen Fläche liegt je eine logarithmische Unstetigkeitsstelle des Integrals.

Die in den Ungleichungen 11) eventuell auftretenden Gleichheitszeichen sollen im Folgenden unberücksichtigt bleiben, da stets bei Gültigkeit eines von ihnen 12) in ein elliptisches Integral übergeht. Ein Spezialfall nur sei erwähnt: Ist

$$M=N, \text{ also sin } \varphi_0 = \frac{gb}{a^2\omega^2},\ \dot{\varphi}_0 = 0,$$

so befindet sich P auf der rotierenden Ellipse in Ruhe.

Aus der Gleichung 12) ist ψ als Funktion von t zu ermitteln. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit ist es angemessen, zur Lösung dieser Aufgabe das Integral 12) umzuformen, es auf eine solche Form zu bringen, daß die Quadratwurzel im Integranden in der Rosenhainschen Normalform[2]) auftritt. Für alle Fälle I, II läßt sich nicht durch die gleiche Substitution einer neuen Variabeln diese Umformung vornehmen; es gibt aber stets sicher eine Substitution der gewünschten Art[3]), da alle Nullstellen von S^2 reell sind.

Im Folgenden sei der Fall Iα behandelt, in dem also

$$-\frac{1}{\varepsilon} < -1 < N < M < 1 < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Substituiert man

[1]) vergl. etwa König und Krafft, § 2.
[2]) s. Rosenhain, S. 16.
[3]) s. Richelot, S. S. 189 etc.

$$13)\quad \psi = \frac{\sigma + N\,\dfrac{1+M}{M-N}}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}},\quad d\psi = \frac{\dfrac{1+M}{M-N}(1+N)}{\left(-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}\right)^2}\,d\sigma,$$

so geht 12) wegen

$$1-\psi = \frac{-2\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}(1-N)}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}},\qquad 1+\psi = \frac{\dfrac{1+M}{M-N}(1+N)}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}},$$

$$1-\varepsilon\psi = \frac{-\sigma(1+\varepsilon) + \dfrac{1+M}{M-N}(1-\varepsilon N)}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}},$$

$$1+\varepsilon\psi = \frac{-\sigma(1-\varepsilon) + \dfrac{1+M}{M-N}(1+\varepsilon N)}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}},$$

$$M-\psi = \frac{(1-\sigma)\,(1+M)}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}},\qquad \psi - N = \frac{\sigma\,(1+N)}{-\sigma + \dfrac{1+M}{M-N}}$$

über in

$$14)\quad \left\{ t = \pm\frac{b}{a\omega}\cdot\frac{\sqrt{(1+M)(1-\varepsilon^2N^2)}}{(M-N)\cdot\sqrt{1-N}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\{ \frac{\left(1-\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon N}\cdot\dfrac{M-N}{1+M}\,\sigma\right)\left(1-\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon N}\cdot\dfrac{M-N}{1+M}\,\sigma\right)}{\left(\dfrac{1+M}{M-N}-\sigma\right)\cdot\sqrt{\sigma(1-\sigma)\left(1-\dfrac{2}{1-N}\cdot\dfrac{M-N}{1+M}\,\sigma\right)}} \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon N}\cdot\dfrac{M-N}{1+M}\,\sigma\right)\left(1-\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon N}\cdot\dfrac{M-N}{1+M}\,\sigma\right)}} \right\} d\sigma,$$

wenn σ_0 dem ψ_0 entspricht.

Leicht läßt sich zeigen:

$$1 > \frac{2}{1-N}\cdot\frac{M-N}{1+M} > \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon N}\cdot\frac{M-N}{1+M} > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon N}\cdot\frac{M-N}{1+M} > 0,$$

und in Uebereinstimmung mit der allgemein üblichen Bezeichnungsweise werde daher

15′) $$\frac{2}{1-N}\cdot\frac{M-N}{1+M}=\varkappa^2,\ \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon N}\cdot\frac{M-N}{1+M}=\lambda^2,\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon N}\cdot\frac{M-N}{1+M}=\mu^2$$

gesetzt, und außerdem sei

15″) $$\frac{1+M}{M-N}=a,$$

sodaß also

15) $$\left\{\begin{array}{l} t=\pm\dfrac{b}{a\omega}\cdot\dfrac{\sqrt{(1+M)(1-\varepsilon^2N^2)}}{(M-N)\cdot\sqrt{1-N}} \\ \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{(1-\lambda^2\sigma)\ (1-\mu^2\sigma)\ d\sigma}{(a-\sigma)\ \sqrt{\sigma(1-\sigma)\ (1-\varkappa^2\sigma)\ (1-\lambda^2\sigma)\ (1-\mu^2\sigma)}}. \end{array}\right.$$

ψ war beschränkt auf das Intervall

$$N\leqq\psi\leqq M,$$

für σ gilt daher gemäß 13)

16) $$0\leqq\sigma\leqq 1.$$

Die Anfangsbedingungen 6) seien noch so gewählt, daß $\sin\varphi_0=\psi_0=N$, also $\sigma_0=0$ wird. Die Allgemeinheit des vorgelegten Problems wird dadurch keineswegs beeinträchtigt.

II.

Ueber die Umkehrung hyperelliptischer Integrale erster Gattung und ihre Anwendung auf solche dritter Gattung.

Die Umkehrung eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung ist im Allgemeinen unendlich vieldeutig; man kann sogar bei gegebenem Wert der oberen Grenze des Integrals jedem Wert des Integrals selbst (durch passende Wahl des Integrationsweges) beliebig nahekommen. Voraussetzung ist dabei allerdings, daß die Variablen auch komplexe Werte annehmen können. Nimmt man nun noch ein zweites hyperelliptisches Integral erster Gattung zu dem ersten hinzu, das zu derselben Riemannschen Fläche gehört, die gleiche obere Grenze hat, aber von jenem ersten linear unabhängig sein muß, und verlangt man, daß beide Integrale über denselben Weg hinerstreckt werden sollen, so kann man die gemeinsame obere Grenze als eindeutige Funktion der beiden Integrale darstellen. Zu dieser Darstellung werden die zweifach unendlichen Thetareihen angewendet.

Die Integrale zweiter und dritter Gattung lassen sich ausdrücken mithilfe und durch jene beiden Integrale erster Gattung. Ihre Behandlung läuft daher im Wesentlichen wieder auf die Umkehrung jener beiden hinaus.

Die kurz skizzierte Art der Umkehrung hyperelliptischer Integrale erster Gattung ist die Riemannsche, die ihrerseits ein Spezialfall[1]) der — häufig umständlicheren, häufig aber auch einfacheren — Jacobischen ist. Die Riemannsche Methode der Umkehr soll im Folgenden angewendet werden.

Die Betrachtungen des vorigen Abschnitts haben zu einem hyperelliptischen Integral dritter Gattung geführt, dessen Auswertung die Lösung des vorgelegten Problems bedeutet. Bevor dieses selbst aber in Angriff genommen wird, soll das, was aus der allgemeinen Theorie benutzt werden wird, unter Speziali-

[1]) s. Neumann, 10. Vorlesung, erster Abschnitt.

sierung auf den Fall, daß die Quadratwurzel im Integranden die Rosenhainsche Normalform besitzt, in aller Kürze zusammengestellt werden. Einige durch die besondere Form des Integrals 15) notwendigen Ergänzungen mögen gleichfalls noch in diesem Abschnitt Platz finden. Die benutzte Literatur ist in Anmerkungen überall angegeben.

Seien

$$17) \qquad w_1 = \int^{\sigma} \frac{d\sigma}{s} \text{ und } w_2 = \int^{\sigma} \frac{\sigma\, d\sigma}{s},$$

wobei

$$18) \qquad s^2 = \sigma(1-\sigma)(1-\varkappa^2\sigma)(1-\lambda^2\sigma)(1-\mu^2\sigma)$$

und

$$18') \qquad 1 > \varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2 > 0 \qquad (\varkappa^2,\ \lambda^2,\ \mu^2 \text{ reell}),$$

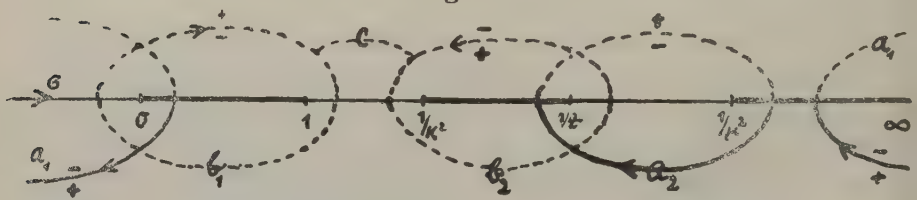
die beiden linear unabhängigen Integrale erster Gattung, von denen ausgegangen werden soll. Die unteren Grenzen von w_1 und w_2 mögen später passend bestimmt werden.

Zur Quadratwurzel s gehört eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten in

$$0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\mu^2},\ \infty.$$

Diese Fläche muß zunächst durch Einführung eines Querschnittsystems in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Das Querschnittsystem sei wie in Fig. 3 gewählt[1]). In der Figur geben die Pfeile Richtungen an, das mit + bezeichnete

Fig. 3



Ufer der Schnitte a_1, a_2, b_1, b_2 ist das linke, das mit — bezeichnete das rechte. In den Strecken

$$\left\{0,\ 1\right\},\ \left\{\frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\lambda^2}\right\},\ \left\{\frac{1}{\mu^2},\ \infty\right\}$$

[1]) vergl. dazu Thomae, S. 18.

mögen oberes und unteres Blatt der Fläche zusammenhängen. Die punktierten Linien verlaufen im unteren Blatt.

Durch die Schnitte a_1, a_2, b_1, b_2, c ist die Fläche, die vor der Zerschneidung mit F, danach mit F′ bezeichnet werden möge, einfach zusammenhängend gemacht. Auf F′ sind w_1 und w_2 eindeutige Funktionen des Ortes. Beim Uebergang über den Schnitt c ändern sie sich stetig; auf den beiden Ufern der übrigen Schnitte haben sie aber verschiedene Werte. Die Differenzen der Werte am linken und am rechten Ufer sind die Periodizitätsmoduln der Integrale. Die von w_1 und w_2 seien

19)
an	a_1	a_2	b_1	b_2
bezw.	A_{11}, A_{21}	A_{12}, A_{22}	B_{11}, B_{21}	B_{12}, B_{22}.

Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, gilt dann 20)

$$A_{11} = 2\int_0^1 dw_1,\quad A_{12} = -2\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} dw_1,\quad B_{11} = -2\int_{\infty}^{0} dw_1,\quad B_{12} = -2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} dw_1,$$

$$A_{21} = 2\int_0^1 dw_2,\quad A_{22} = -2\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} dw_2,\quad B_{21} = -2\int_{\infty}^{0} dw_2,\quad B_{22} = -2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} dw_2.$$

Dabei sind die Integrale im oberen Blatt und auf der linken Seite der reellen σ-Achse in Richtung wachsender σ genommen.

Aus w_1 und w_2 können alle übrigen zu F′ gehörigen überall endlichen Integrale, also alle Integrale erster Gattung zusammengesetzt werden.

Für das Folgende ist die Bildung der beiden Normalintegrale notwendig, d. h. derjenigen beiden Integrale, die

21)
am Querschnitt	a_1	a_2	b_1	b_2
bezw. den Periodizitätsmodul	1,0	0,1	τ_{11}, τ_{21}	τ_{12}, τ_{22}

besitzen. Setzt man

22)
$$\begin{cases} A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = |A|, \\ \alpha_{11} = \dfrac{A_{22}}{|A|},\quad \alpha_{21} = -\dfrac{A_{12}}{|A|},\quad \alpha_{12} = -\dfrac{A_{21}}{|A|},\quad \alpha_{22} = \dfrac{A_{11}}{|A|} \end{cases}$$

und dann

23) $$u_1 = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{21}w_2,\quad u_2 = \alpha_{12}w_1 + \alpha_{22}w_2,$$

so sind u_1 und u_2 die Integrale mit der verlangten Eigenschaft 21), wenn noch[1]):

$$24)\quad \begin{cases} \tau_{11} = \alpha_{11} B_{11} + \alpha_{21} B_{21}, \\ \tau_{12} = \alpha_{11} B_{12} + \alpha_{21} B_{22} = \tau_{21} = \alpha_{12} B_{11} + \alpha_{22} B_{21}, \\ \tau_{22} = \alpha_{12} B_{12} + \alpha_{22} B_{22}. \end{cases}$$

Von Wichtigkeit sind die Werte von u_1 und u_2 in den Verzweigungspunkten von F'. Im Punkte $\sigma = 0$ sollen u_1 und u_2 die Werte λ_1 und λ_2 haben. Dann hat man, wie aus Fig. 3 und 21) folgt: 25)

$$\begin{aligned}
u_1\ (0) &= \lambda_1, & u_2\ (0) &= \lambda_2, \\
u_1\ (1) &= \lambda_1 + \frac{1}{2}, & u_2\ (1) &= \lambda_2, \\
u_1\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right) &= \lambda_1 + \frac{1}{2} + \frac{\tau_{11}}{2} + \frac{\tau_{12}}{2}, & u_2\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right) &= \lambda_2 + \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{22}}{2}, \\
u_1\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) &= \lambda_1 + \frac{1}{2} + \frac{\tau_{11}}{2} + \frac{\tau_{12}}{2}, & u_2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) &= \lambda_2 - \frac{1}{2} + \frac{\tau_{12}}{2} + \frac{\tau_{22}}{2}, \\
u_1\left(\frac{1}{\mu^2}\right) &= \lambda_1 + \frac{1}{2} + \frac{\tau_{11}}{2}, & u_2\left(\frac{1}{\mu^2}\right) &= \lambda_2 - \frac{1}{2} + \frac{\tau_{12}}{2}, \\
u_1\ (\infty) &= \lambda_1 + \frac{\tau_{11}}{2}, & u_2\ (\infty) &= \lambda_2 + \frac{\tau_{12}}{2}.
\end{aligned}$$

Ohne hier schon die Begründung anzugeben, sei

$$25')\qquad \lambda_1 = \frac{\tau_{12}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\tau_{22}}{2}$$

gesetzt.

Im Ferneren wird wesentlich Gebrauch gemacht von den Thetafunktionen zweier Veränderlicher. Deren Definition ist[2]):

$$\begin{aligned}
\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} \exp. \Bigg\{ \pi i \Bigg[\left(m_1 + \frac{g_1}{2}\right)^2 \tau_{11} \\
26)\qquad + 2\left(m_1 + \frac{g_1}{2}\right)\left(m_2 + \frac{g_2}{2}\right)\tau_{12} + \left(m_2 + \frac{g_2}{2}\right)^2 \tau_{22} \\
+ \left(m_1 + \frac{g_1}{2}\right)(2 v_1 + h_1) + \left(m_2 + \frac{g_2}{2}\right)(2 v_2 + h_2) \Bigg] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

v_1, v_2 sind die Variabeln; g_1, g_2, h_1, h_2 sind ganze Zahlen; $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ heißt die Charakteristik der Thetafunktion. τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} sind im Wesentlichen beliebige Größen, nur muß der Imaginärteil der

[1]) zur Gleichheit von τ_{12} und τ_{21} s. Neumann, S. 436.

[2]) vergl. etwa Rosenhain, S. S. 27, 28 oder Krause, S. 8. „exp." bedeutet wie üblich die Exponentialfunktion, wenn der Exponent sehr unübersichtlich ist.

quadratischen Form

27) $$m_1{}^2\tau_{11} + 2m_1 m_2 \tau_{12} + m_2{}^2\tau_{22}$$

positiv definit sein. Ist diese Bedingung erfüllt, dann konvergiert die oben definierte Reihe unbedingt und gleichmäßig für jede Kombination zwischen einem Gebiet der v_1- und der v_2-Ebene[1]).

Die wichtigste Eigenschaft der Thetafunktionen ist diese: Die Quadrate der Quotienten zweier Thetas mit verschiedenen Charakteristiken sind vierfach periodische Funktionen mit den vier Paaren

$$1,0;\quad 0,1;\quad \tau_{11}, \tau_{12};\quad \tau_{12}, \tau_{22}$$

zusammengehöriger Perioden.

Die g_1, g_2, h_1, h_2 lassen sich danach so beschränken, daß sie nur die Werte 0 und 1 annehmen. Dann gibt es je nach Verteilung der 0, 1 in dem Schema

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

16 verschiedene Charakteristiken und daher ebensoviele Thetafunktionen. Diese zerfallen in sechs ungerade Funktionen mit den „ungeraden" Charakteristiken

28) $$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}$$

und zehn gerade Funktionen mit den „geraden" Charakteristiken

29) $$\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}.$$

Als ungerade oder gerade wird demnach eine Charakteristik bezeichnet, je nachdem ob

29′) $$g_1 h_1 + g_2 h_2 \equiv 1 \text{ oder} \equiv 0 \pmod 2.$$

Die sechs ungeraden Thetafunktionen besitzen das Wertepaar $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ als Nullstelle, oder:

$$\vartheta \begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(v_1, v_2) = \vartheta(v_1, v_2)$$

verschwindet, wegen[2])

---

[1]) vergl. etwa Krause, S. 3.

[2]) s. Krause, S. 13. Die Formel ist hier schon in allgemeiner Form gegeben, weil sie später noch gebraucht wird.

30) $$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}\left(v_1+g\begin{bmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix},\ v_2+h\begin{bmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}\right)$$

$$= \exp.\left[-i\pi\left\{\frac{1}{4}(g_1'^2\tau_{11}+2g_1'g_2'\tau_{12}+g_2'^2\tau_{22})+\frac{1}{2}\left\{g_1'(h_1+h_1')+g_2'(h_2+h_2')\right\}+g_1'v_1+g_2'v_2\right\}\right]\cdot\vartheta\begin{bmatrix} g_1+g_1' & g_2+g_2' \\ h_1+h_1' & h_2+h_2' \end{bmatrix}(v_1, v_2),$$

wenn man die Argumente gleich Halbperioden mit ungerader Charakteristik setzt. Unter Halbperioden mit ungerader Charakteristik ist dabei Folgendes verstanden: Die Hälften zweier zusammengehöriger Perioden sind

31) $$\begin{cases} g\begin{bmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}=g_1'\cdot\frac{\tau_{11}}{2}+g_2'\cdot\frac{\tau_{12}}{2}+h_1'\cdot\frac{1}{2}+h_2'\cdot\frac{0}{2}, \\ h\begin{bmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}=g_1'\cdot\frac{\tau_{12}}{2}+g_2'\cdot\frac{\tau_{22}}{2}+h_1'\cdot\frac{0}{2}+h_2'\cdot\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Der Komplex $\begin{bmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}$ heißt die Charakteristik dieses Systems, und die ist nach 29') ungerade, wenn

$$g_1'h_1'+g_2'h_2'\equiv 1 \pmod 2.$$

Man wählt jetzt für die Argumente v_1, v_2 der Thetafunktionen jene beiden Normalintegrale u_1, u_2.

32) $$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(u_1, u_2)$$

ist damit eine Funktion der oberen Grenze σ jener Integrale. Die Thetareihen konvergieren für jedes σ, da die Bedingung 27) erfüllt ist, wenn τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} die Periodizitätsmoduln der u_1, u_2 bedeuten. So ist nämlich das Querschnittsystem, wie es in Figur 3 angegeben ist, gezogen[1]).

Das Quadrat eines Quotienten zweier Thetas 32) mit verschiedenen Charakteristiken erfährt bei der Ueberschreitung der Querschnitte a_1, a_2, b_1, b_2 von F' keine Aenderung. Auf der unzerschnittenen Fläche F sind daher solche Quadrate stetig — bis auf höchstens zwei Pole, denn es läßt sich noch zeigen[2]), daß jede der 16 Thetafunktionen 32) auf F' nur zwei Nullstellen besitzt. Eine Ausnahme bildet allerdings $\vartheta\begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix}(u_1, u_2)$.

[1]) vergl. Neumann, S. S. 29, 438, 444.
[2]) vergl. Neumann, S. 449.

Eine bis auf Pole stetige Funktion ist nun eine zu der betreffenden Riemannschen Fläche gehörige algebraische Funktion. Die Nullpunkte der Thetas kann man sich verschaffen und daher auch die algebraischen Funktionen, denen die oben eingeführten Quadrate zweier Thetas bis auf konstante Faktoren gleich sein müssen.

Um die Nullpunkte der Thetafunktionen 32) zu finden, benutzt man den Satz[1]): Die durch die beiden Kongruenzen

$$33)\quad \begin{cases} \begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}\equiv 0 \pmod 2 \\ \begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

gegebenen Fälle sind die beiden einzigen, bei denen die Summe zweier ungerader Charakteristiken wieder eine solche gibt. Unter der Summe zweier Charakteristiken ist dabei die Charakteristik verstanden, deren Elemente durch Addition der entsprechenden beiden Elemente der Summanden gebildet werden. Aus 33) folgt sofort für die sechs ungeraden Thetafunktionen:

$$34)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u_1,u_2)=0 & \text{für } \sigma=\frac{1}{\varkappa^2} \text{ und } \sigma=\frac{1}{\mu^2}, \\ \vartheta\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}(u_1,u_2)=0 & \text{für } \sigma=\frac{1}{\lambda^2} \text{ und } \sigma=\infty, \\ \vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}(u_1,u_2)=0 & \text{für } \sigma=0 \text{ und } \sigma=\frac{1}{\mu^2}, \\ \vartheta\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,u_2)=0 & \text{für } \sigma=1 \text{ und } \sigma=\infty, \\ \vartheta\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}(u_1,u_2)=0 & \text{für } \sigma=0 \text{ und } \sigma=\frac{1}{\varkappa^2}, \\ \vartheta\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(u_1,u_2)=0 & \text{für } \sigma=1 \text{ und } \sigma=\frac{1}{\lambda^2}, \end{cases}$$

denn das Formelsystem 25) läßt sich mit 25′) und 31) auch so schreiben:

[1]) vergl. Krazer, S. 3.

$$35)\quad \begin{cases} u_1(0) = g\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}, & u_2(0) = h\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}, \\ u_1(1) = g\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}, & u_2(1) = h\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}, \\ u_1\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right) = g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}, & u_2\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right) = h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}, \\ u_1\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = g\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}, & u_2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = h\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}, \\ u_1\left(\frac{1}{\mu^2}\right) = g\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}, & u_2\left(\frac{1}{\mu^2}\right) = h\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}, \\ u_1(\infty) = g\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}, & u_2(\infty) = h\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}, \end{cases}$$

d. h. u_1 und u_2 besitzen in den sechs Verzweigungspunkten 0, 1, $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$, ∞ der Reihe nach Werte, die modulo ganzen Perioden Halbperioden mit den ungeraden Charakteristiken 28) kongruent sind. So sind in 25[1]) die Anfangswerte λ_1 und λ_2 von u_1 und u_2 bestimmt worden.

Die Nullpunkte der geraden Thetas mit den Charakteristiken 29) $\left(\text{abgesehen von}\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}\right)$ bestimmt man entsprechend, nachdem man die geraden Charakteristiken je durch die Summe zweier ungerader Charakteristiken ersetzt hat[1]). Man bekommt dann:

$$36)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = 0 \text{ und } \sigma = \infty, \\ \vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = \frac{1}{\mu^2} \text{ und } \sigma = \infty, \\ \vartheta\begin{bmatrix}01\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = \frac{1}{\varkappa^2} \text{ und } \sigma = \infty, \\ \vartheta\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = 0 \text{ und } \sigma = \frac{1}{\lambda^2}, \\ \vartheta\begin{bmatrix}01\\00\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = \frac{1}{\lambda^2} \text{ und } \sigma = \frac{1}{\mu^2}, \end{cases}$$

[1]) vergl. Krazer, S. 4.

$$36)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = \frac{1}{\varkappa^2} \text{ und } \sigma = \frac{1}{\lambda^2}, \\ \vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = 0 \text{ und } \sigma = 1, \\ \vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = 1 \text{ und } \sigma = \frac{1}{\mu^2}, \\ \vartheta\begin{bmatrix}11\\00\end{bmatrix}(u_1, u_2) = 0 & \text{für } \sigma = 1 \text{ und } \sigma = \frac{1}{\varkappa^2}. \end{cases}$$

Die zehnte gerade Thetafunktion $\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u_1, u_2)$ verschwindet nach 30) und 35) in allen sechs Verzweigungspunkten. Daher ist notwendig identisch

$$37)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u_1, u_2) = \vartheta(u_1, u_2) = 0.$$

Auf Grund der Formeln 34) und 36) und des vorher über die Zugehörigkeit einer algebraischen Funktion zu dem Quadrat eines jeden Quotienten zweier Thetafunktionen mit verschiedenen Charakteristiken Gesagten läßt sich jetzt folgende Tabelle aufstellen:

$$38)\quad \begin{cases} \text{I)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u_1, u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2)} = -\dfrac{\lambda\lambda_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{(1-\varkappa^2\sigma)(1-\mu^2\sigma)}{1-\sigma}, \\ \text{II)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}(u_1, u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2)} = -\dfrac{\lambda\varkappa_1\mu_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{1-\lambda^2\sigma}{1-\sigma}, \\ \text{III)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}(u_1, u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2)} = -\dfrac{\varkappa\lambda\varkappa_1\lambda_1}{\mu_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{\sigma(1-\mu^2\sigma)}{1-\sigma}, \\ \text{IV)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1, u_2)} = \dfrac{\lambda\mu\lambda_1\mu_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{\sigma(1-\varkappa^2\sigma)}{1-\sigma}, \end{cases}$$

38)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{V)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = -\frac{\varkappa\,\mu\,\lambda_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot(1-\lambda^2\sigma),\\
&\text{VI)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = \varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma},\\
&\text{VII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = -\frac{\mu\,\varkappa_1\,\lambda_1}{\mu_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot\frac{1-\mu^2\sigma}{1-\sigma},\\
&\text{VIII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = \frac{\varkappa\,\lambda_1\,\mu_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\varkappa}\cdot\frac{1-\varkappa^2\sigma}{1-\sigma},\\
&\text{IX)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = -\frac{\varkappa\,\mu\,\varkappa_1\,\mu_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot\frac{\sigma\,(1-\lambda^2\sigma)}{1-\sigma},\\
&\text{X)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\00\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = \frac{\varkappa\,\varkappa_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\varkappa}\cdot\frac{(1-\lambda^2\sigma)(1-\mu^2\sigma)}{1-\sigma},\\
&\text{XI)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = -\frac{\mu\;\mu_1}{\mu_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot\frac{(1-\varkappa^2\sigma)(1-\lambda^2\sigma)}{1-\sigma},\\
&\text{XII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta_2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = \varkappa\,\lambda\,\mu\,\sigma,
\end{aligned}\right.$$

$$38)\begin{cases} \text{XIII)}\ \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = -\dfrac{\varkappa\,\lambda\,\mu_1}{\mu_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot(1-\mu^2\sigma), \\ \text{XIV)}\ \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\00\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u_1,\,u_2)} = \dfrac{\lambda\,\mu\,\varkappa_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\varkappa}\cdot(1-\varkappa^2\sigma). \end{cases}$$

Dabei sind zur Abkürzung die Richelotschen Bezeichnungen gewählt:

$$39)\quad \begin{matrix} \varkappa_1{}^2 = 1-\varkappa^2, & \lambda_1{}^2 = 1-\lambda^2, & \mu_1{}^2 = 1-\mu^2, \\ \lambda_\varkappa{}^2 = \varkappa^2-\lambda^2, & \mu_\varkappa{}^2 = \varkappa^2-\mu^2, & \mu_\lambda{}^2 = \lambda^2-\mu^2. \end{matrix}$$

Die Vorzeichen in 38) sind berechnet worden nach der Formel[1])

$$40)\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}g_1 & g_2\\ h_1 & h_2\end{bmatrix}\left(g\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}, h\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}\right)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}g_1' & g_2'\\ h_1' & h_2'\end{bmatrix}\left(g\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}, h\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{bmatrix}\right)}$$

$$= e^{-i\pi\{\varepsilon_1(h_1-h_1')+\varepsilon_2(h_2-h_2')\}}\cdot\frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}g_1+\varepsilon_1 & g_2+\varepsilon_2\\ h_1+\eta_1 & h_2+\eta_2\end{bmatrix}(0,0)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}g_1'+\varepsilon_1 & g_2'+\varepsilon_2\\ h_1'+\eta_1 & h_2'+\eta_1\end{bmatrix}(0,0)},$$

die aus 30) resultiert. Sie ergeben sich dann aus der Erkenntnis, daß alle 16 Thetafunktionen für reelle Argumente reell sind, die Quadrate der Quotienten zweier verschiedener Thetas mit den Argumenten 0,0 (für σ muß jedesmal ein geeigneter Verzweigungspunkt gewählt werden) daher positiv sein müssen. Die in 38) auftretenden konstanten Faktoren sind nach dem z. B. bei Merten[2]) angegebenen Verfahren gefunden.

Zur Vereinfachung späterer numerischer Rechnungen sollen statt u_1, u_2 noch andere Variabeln u, v eingeführt werden. Und zwar sei:

$$41)\ u = u_1 - \frac{\tau_{12}}{2} = u_1 - g\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix},\ v = u_2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau_{22}}{2} = u_2 - h\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}.$$

[1]) vergl. auch Prym, S. 62.
[2]) s. Merten, S. S. 33, 34.

Das Formelsystem 38) geht dann durch Anwendung der aus 30) folgenden Beziehung

$$42)\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}\left(u + g\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix},\ v + h\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}\right)}{\vartheta^2\begin{bmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix}\left(u + g\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix},\ v + h\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}\right)} = e^{i\pi(h_2 - h_2')} \cdot \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix} g_1 & g_2+1 \\ h_1 & h_2+1 \end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix} g_1' & g_2'+1 \\ h_1' & h_2'+1 \end{bmatrix}(u,v)}$$

über in folgendes:

$$43)\quad \begin{cases} \text{I)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \dfrac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{(1-\varkappa^2\sigma)\,(1-\mu^2\sigma)}{1-\sigma}, \\ \text{II)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \dfrac{\lambda\,\varkappa_1\,\mu_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{1-\lambda^2\sigma}{1-\sigma}, \\ \text{III)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \dfrac{\varkappa\,\lambda\,\varkappa_1\,\lambda_1}{\mu_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{\sigma\,(1-\mu^2\sigma)}{1-\sigma}, \\ \text{IV)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \dfrac{\lambda\,\mu\,\lambda_1\,\mu_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot \dfrac{\sigma\,(1-\varkappa^2\sigma)}{1-\sigma}, \\ \text{V)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \dfrac{\varkappa\,\mu\,\lambda_1}{\lambda_\varkappa\ \mu_\lambda} \cdot (1-\lambda^2\sigma), \\ \text{VI)} & \dfrac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \varkappa_1\,\lambda_1\,\mu_1 \cdot \dfrac{\sigma}{1-\sigma}, \end{cases}$$

43)
$$\text{VII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\10\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\mu\,\varkappa_1\,\lambda_1}{\mu_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot\frac{1-\mu^2\sigma}{1-\sigma},$$

$$\text{VIII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\varkappa\,\lambda_1\,\mu_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\varkappa}\cdot\frac{1-\varkappa^2\sigma}{1-\sigma},$$

$$\text{IX)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\varkappa\,\mu\,\varkappa_1\,\mu_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot\frac{\sigma(1-\lambda^2\sigma)}{1-\sigma},$$

$$\text{X)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\varkappa\,\varkappa_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\varkappa}\cdot\frac{(1-\lambda^2\sigma)(1-\mu^2\sigma)}{1-\sigma},$$

$$\text{XI)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\00\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\mu\,\mu_1}{\mu_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot\frac{(1-\varkappa^2\sigma)(1-\lambda^2\sigma)}{1-\sigma},$$

$$\text{XII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \varkappa\,\lambda\,\mu\,\sigma,$$

$$\text{XIII)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\00\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\varkappa\,\lambda\,\mu_1}{\mu_\varkappa\;\mu_\lambda}\cdot(1-\mu^2\sigma),$$

$$\text{XIV)}\quad \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(u,v)} = \frac{\lambda\,\mu\,\varkappa_1}{\lambda_\varkappa\;\mu_\varkappa}\cdot(1-\varkappa^2\sigma).$$

Und weiter ist identisch

44) $$\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,v)=0.$$

Die damit gewonnenen Resultate über die Integrale erster Gattung ermöglichen die Behandlung der dritter Gattung. Der Abschnitt I führte auf ein solches von der Form

45) $$W=\int_0^\sigma \frac{(k_1-\sigma)(k_2-\sigma)}{(a-\sigma)s}\cdot d\sigma,$$

wobei k_1 und k_2 zwei verschiedene der fünf Verzweigungspunkte 0, 1, $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$ und a eine reguläre Stelle der Riemannschen Fläche bedeuten. Um die Behandlung dieses Integrals anschließen zu können an schon vorhandene Darstellungen ähnlicher Integrale dritter Gattung, ist W umzuformen. Durch Produktintegration ergeben sich aus 45) folgende beiden Beziehungen, wenn die untere Grenze des Integrals W und etwa auftretende Konstanten noch unberücksichtigt bleiben:

$$W=(k_1-\sigma)\int^\sigma \frac{k_2-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}+\int^\sigma\int \frac{k_2-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}\,d\sigma,$$

$$W=(k_2-\sigma)\int^\sigma \frac{k_1-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}+\int^\sigma\int \frac{k_1-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}\,d\sigma.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich etwas anders so schreiben:

$$W=(k_1-\sigma)\int^\sigma \frac{k_2-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}+\int^\sigma\left\{\int\frac{d\sigma}{s}+(k_2-a)\int\frac{d\sigma}{(a-\sigma)s}\right\}d\sigma,$$

$$W=(k_2-\sigma)\int^\sigma \frac{k_1-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}+\int^\sigma\left\{\int\frac{d\sigma}{s}+(k_1-a)\int\frac{d\sigma}{(a-\sigma)s}\right\}d\sigma.$$

Durch Multiplikation der ersten dieser Gleichungen mit $\frac{1}{k_2-a}$, der zweiten mit $-\frac{1}{k_1-a}$ und nachfolgender Addition beider erhält man:

$$W\cdot\left\{\frac{1}{k_2-a}-\frac{1}{k_1-a}\right\}$$

$$=\frac{k_1-\sigma}{k_2-a}\int^\sigma\frac{k_2-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}-\frac{k_2-\sigma}{k_1-a}\int^\sigma\frac{k_1-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}+\left\{\frac{1}{k_2-a}-\frac{1}{k_1-a}\right\}\int^\sigma w_1\,d\sigma,$$

wobei $\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{s}$ in Uebereinstimmung mit Früherem gleich w_1 gesetzt ist. Wegen

$$\int_0^\sigma w_1\, d\sigma = \sigma w_1 - \int_0^\sigma \sigma\, dw_1 = \sigma w_1 - w_2$$

folgt damit: $W =$

$$\frac{(k_1-a)\,(k_2-a)}{k_1-k_2}\cdot\left\{\frac{k_1-\sigma}{k_2-a}\int_0^\sigma \frac{k_2-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s} - \frac{k_2-\sigma}{k_1-a}\int_0^\sigma \frac{k_1-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{s}\right\} + \sigma w_1 - w_2.$$

Setzt man jetzt, um auch die gemeinsame untere Grenze der bisher benutzten Integrale festzulegen:

$$46)\quad \begin{cases} w_1 = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{s}, & w_2 = \int_0^\sigma \frac{\sigma\, d\sigma}{s}, \\ u = \int_0^\sigma du, & v = \int_0^\sigma dv, \\ u = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2, & v = \alpha_{12} w_1 + \alpha_{22} w_2, \end{cases}$$

so kommt:

$$47)\quad W = \frac{(k_1-a)\,(k_2-a)}{k_1-k_2}\left\{(k_1-\sigma)\int_0^\sigma \frac{k_2-\sigma}{(k_2-a)\,(a-\sigma)}\cdot\frac{d\sigma}{s}\right.$$
$$\left.(k_2-\sigma)\int_0^\sigma \frac{k_1-\sigma}{(k_1-a)\,(a-\sigma)}\cdot\frac{d\sigma}{s}\right\} + \sigma w_1 - w_2.$$

Die Integrale dritter Gattung von der Form

$$48)\qquad \mathfrak{W}_k = \int_0^\sigma \frac{k-\sigma}{a-\sigma}\cdot\frac{s(a)}{k-a}\cdot\frac{d\sigma}{s},$$

wie sie abgesehen vom Faktor

$$48')\quad s(a) = \sqrt{a\,(1-a)\,(1-\varkappa^2 a)\,(1-\lambda^2 a)\,(1-\mu^2 a)}$$

in 47) auftreten, sind nun schon des Oefteren einer eingehenden Behandlung unterzogen worden[1]).

[1]) s. Roch, S. S. 42—51; Brill, S. S. 274—276; Schleiermacher, S. S. 12—15.

k bedeute einen beliebigen der Verzweigungspunkte 0, 1, $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$. Setzt man

$$49) \qquad \alpha = \int_0^a du, \qquad \beta = \int_0^a du,$$

so läßt sich die Gültigkeit der Relation[1]

$$50) \quad \mathfrak{W}_k = \log \frac{\vartheta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (u+\alpha, v+\beta)}{\vartheta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (u-\alpha, v-\beta)} - A_k u - B_k v,$$

nachweisen, wobei A_k und B_k Konstanten sind von folgender Bedeutung: Zu dem Verzweigungspunkt k gehöre das System [k] zusammengehöriger Halbperioden als Werte von u, v. Dann gilt[2]):

$$51) \quad \begin{cases} A_k = 2 \cdot \dfrac{\partial \log \vartheta \left(\begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix} + [k] \right) (\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \\ B_k = 2 \cdot \dfrac{\partial \log \vartheta \left(\begin{bmatrix} 11 \\ 01 \end{bmatrix} + [k] \right) (\alpha, \beta)}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Dabei ist, wie aus 35) und 41) ersichtlich, für

$$52) \quad \begin{cases} k = 0 & 1 & \frac{1}{\varkappa^2} & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\mu^2} \\ [k] \equiv \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 00 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Das Zeichen log soll hier, wie stets im Folgenden, den natürlichen Logarithmus bedeuten.

Durch Vergleich von 47) und 48) ergibt sich für W:

$$W = \frac{(k_1 - a)(k_2 - a)}{(k_1 - k_2)\, s(a)} [k_1 \mathfrak{W}_{k_2} - k_2 \mathfrak{W}_{k_1}] - w_2 - \sigma \left\{ \frac{(k_1 - a)(k_2 - a)}{(k_1 - k_2)\, s(a)} [\mathfrak{W}_{k_2} - \mathfrak{W}_{k_1}] - w_1 \right\}.$$

Nach der Definition von $\mathfrak{W}_{k_1}$ und $\mathfrak{W}_{k_2}$ ist nun

[1]) s. Anmerkung auf der vorigen Seite.

[2]) Jedenfalls lassen sich die bei Schleiermacher auf der letzten Seite angegebenen Ausdrücke so schreiben.

$$\mathfrak{W}_{k_2} - \mathfrak{W}_{k_1} = \int_0^\sigma \left(\frac{k_2 - \sigma}{k_2 - a} - \frac{k_1 - \sigma}{k_1 - a}\right) \cdot \frac{s(a)}{a - \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{s} = \frac{(k_1 - k_2)\, s(a)}{(k_1 - a)(k_2 - a)} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{s},$$

also

$$53) \quad \frac{(k_1 - a)(k_2 - a)}{(k_1 - k_2)\, s(a)} [\mathfrak{W}_{k_2} - \mathfrak{W}_{k_1}] - w_1 = 0,$$

und damit wird

$$W = \frac{(k_1 - a)(k_2 - a)}{(k_1 - k_2)\, s(a)} [k_1 \mathfrak{W}_{k_2} - k_2 \mathfrak{W}_{k_1}] - w_2$$

(wovon man sich auch direkt überzeugen kann) oder mithilfe von 50):

$$54) \quad W = \frac{(k_1 - a)(k_2 - a)}{(k_1 - k_2)\, s(a)} \cdot \Big\{ (k_1 - k_2) \log Q + (k_2 A_{k_1} - k_1 A_{k_2})\, u + (k_2 B_{k_1} - k_1 B_{k_2})\, v \Big\} - w_2,$$

wobei

$$55) \quad Q = \frac{\vartheta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (u + \alpha, v + \beta)}{\vartheta \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} (u - \alpha, v - \beta)}.$$

Ersetzt man in der Identität 53) gemäß 50)

$\mathfrak{W}_{k_2} - \mathfrak{W}_{k_1}$ durch $(A_{k_1} - A_{k_2})\, u + (B_{k_1} - B_{k_2})\, v$

und gemäß 46)

u durch $\alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2$, v durch $\alpha_{12} w_1 + \alpha_{22} w_2$,

so kommt:

$$w_1 \cdot \frac{s(a)(k_1 - k_2)}{(k_1 - a)(k_2 - a)} = w_1 (\alpha_{11} \{A_{k_1} - A_{k_2}\} + \alpha_{12} \{B_{k_1} - B_{k_2}\}) + w_2 (\alpha_{21} \{A_{k_1} - A_{k_2}\} + \alpha_{22} \{B_{k_1} - B_{k_2}\}).$$

Daraus folgt, weil w_1 und w_2 linear unabhängig voneinander sind, notwendig:

$$56) \quad \frac{s(a)(k_1 - k_2)}{(k_1 - a)(k_2 - a)} = \alpha_{11} (A_{k_1} - A_{k_2}) + \alpha_{12} (B_{k_1} - B_{k_2}),$$

$$57) \quad 0 = \alpha_{21} (A_{k_1} - A_{k_2}) + \alpha_{22} (B_{k_1} - B_{k_2}).$$

Diese beiden Gleichungen, die später auch für sich noch Verwendung finden werden, können dazu dienen, die Beziehung 54) etwas zu vereinfachen. Dazu und auch für später ist erst notwendig zu wissen, daß die vier Größen α_{11}, α_{21}, α_{12}, α_{22} alle von Null verschieden sind. Am einfachsten sieht man das wohl aus 25). Danach ist nämlich

$$\int_0^1 dv = \int_0^1 \frac{\alpha_{12}+\alpha_{22}\sigma}{s}\, d\sigma = 0,$$

$$\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{\alpha_{11}+\alpha_{21}\sigma}{s}\, d\sigma = 0.$$

Und diese Gleichungen können nur bestehen, wenn

für ein σ_1: $\alpha_{12}+\alpha_{22}\sigma_1 = 0 \quad (0 < \sigma_1 < 1)$,

für ein σ_2: $\alpha_{11}+\alpha_{21}\sigma_2 = 0 \quad \left(\frac{1}{\varkappa^2} < \sigma_2 < \frac{1}{\lambda^2}\right)$.

Damit hat man schon den gesuchten Beweis, denn es ist

58) $$D = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0.$$

Aus 56) und 57) findet man:

$$\frac{(k_1-k_2)\,s(a)}{(k_1-a)(k_2-a)} = \frac{D}{\alpha_{22}}(A_{k_1}-A_{k_2}) = -\frac{D}{\alpha_{21}}(B_{k_1}-B_{k_2}).$$

Beachtet man nun, daß

$$w_2 = -u\cdot\frac{\alpha_{12}}{D}+v\cdot\frac{\alpha_{11}}{D},$$

so läßt sich 54) einfacher so schreiben:

$$W = \frac{(k_1-a)(k_2-a)}{s(a)}\Bigg\{\log Q$$

$$-u\left(\frac{k_2 A_{k_1}-k_1 A_{k_2}}{k_2-k_1}-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\cdot\frac{A_{k_2}-A_{k_1}}{k_2-k_1}\right)$$

$$-v\left(\frac{k_2 B_{k_1}-k_1 B_{k_2}}{k_2-k_1}-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\cdot\frac{B_{k_2}-B_{k_1}}{k_2-k_1}\right)\Bigg\}$$

oder so[1]):

$$59) \qquad W = \frac{(k_1 - a)(k_2 - a)}{s(a)} \left\{ \log Q - \mathfrak{A}u - \mathfrak{B}v \right\},$$

wobei

$$60) \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{A_{k_2}\left(k_1 + \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\right) - A_{k_1}\left(k_2 + \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\right)}{k_1 - k_2}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{B_{k_2}\left(k_1 + \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\right) - B_{k_1}\left(k_2 + \dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\right)}{k_1 - k_2}. \end{cases}$$

[1]) Staude gewinnt auf direktem, wenn auch sehr langwierigem Wege mithilfe eines Additionstheorems der Thetafunktionen die obige Gleichung 59), ohne die Kenntnis der Relation 50) vorauszusetzen. Bei ihm haben überdies die Konstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine elegantere Form. Das oben eingeschlagene Verfahren hat aber zum Beispiel den Vorteil, daß wichtige Nebenresultate wie 56) und 57) gewonnen werden.

III.

Konstantenbestimmungen.

Für Berechnungen ist unerläßlich die Kenntnis der im vorigen Abschnitt eingeführten Konstanten:

$$\tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22};\ \alpha_{11},\ \alpha_{21},\ \alpha_{12},\ \alpha_{22};\ \alpha,\ \beta.$$

Methoden zu ihrer Auswertung seien im Folgenden gegeben.

1. Die Größen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} berechnet man nach einem zuerst von Thomae[1]) angegebenen Verfahren:

Nach dem Formelsystem 43) gelten die Beziehungen:

$$61)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(0,0)}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(0,0)} = \sqrt[4]{\dfrac{\varkappa_1^{\,2}\,\mu_1^{\,2}}{\lambda_1^{\,2}}}, \\ B = \dfrac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(0,0)}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(0,0)} = \sqrt[4]{\dfrac{\varkappa^2\,\mu_1^{\,2}\,\mu_\lambda^{\,2}}{\lambda^2\,\mu_\varkappa^{\,2}}}, \\ C = \dfrac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(0,0)}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(0,0)} = \sqrt[4]{\dfrac{\varkappa^2\,\varkappa_1^{\,2}\,\mu_\lambda^{\,2}}{\lambda^2\,\lambda_1^{\,2}\,\mu_\varkappa^{\,2}}}, \end{cases}$$

in denen die Wurzeln positiv zu nehmen sind[2]).

Weiter folgt aus der Definition der Thetafunktionen mit einer für spätere Zwecke hinreichenden Genauigkeit (im Einzelnen sind für jeden speziellen Fall die folgenden Entwicklungen besonders zu untersuchen):

$$62)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(0,0) = 1+2p+2q+2pqr+2\,(pq^4+p^4q)\,(r^2-2), \\ \vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(0,0) = 1-2p+2q-2pqr-2\,(pq^4-p^4q)\,(r^2-2), \\ \vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(0,0) = 1-2p-2q+2pqr-2\,(pq^4+p^4q)\,(r^2-2), \\ \vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(0,0) = 1+2p-2q-2pqr+2\,(pq^4-p^4q)\,(r^2-2), \end{cases}$$

[1]) s. Thomae, S. 12; vergl. v. Braunmühl, S. S. 565, 566.

[2]) vergl. Merten, S. 55.

wenn

$$63)\quad e^{i\pi\tau_{11}} = p, \quad e^{i\pi\tau_{22}} = q, \quad e^{2i\pi\tau_{12}} + e^{-2i\pi\tau_{12}} = r.$$

Setzt man noch mit Thomae

$$64)\quad p_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-A-B+C}{1+A+B+C}, \quad q_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+A-B-C}{1+A+B+C},$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-A+B-C}{1+A+B+C},$$

so ergeben sich aus 62) und 64) die Relationen:

$$65)\quad p_0 = p + pq^4(r^2-2), \quad q_0 = q + qp^4(r^2-2), \quad r_0 = pqr.$$

Quadriert man die ersten beiden und berücksichtigt die dritte, so erhält man, wenn man noch $2pq^4$ und $2qp^4$ vernachlässigt:

$$p_0^2 = p^2 + 2p^2q^4r^2 + p^2q^8r^4 = p^2 + 2q^2r_0^2 + \frac{q^4r_0^4}{p^2},$$

$$q_0^2 = q^2 + 2q^2p^4r^2 + q^2p^8r^4 = q^2 + 2p^2r_0^2 + \frac{p^4r_0^4}{q^2}.$$

Man erkennt daraus, daß man mit genügender Genauigkeit häufig

$$p^2 = p_0^2, \quad q^2 = q_0^2$$

setzen kann (womit natürlich nicht folgt $p = p_0$, $q = q_0$). Die Entscheidung darüber, ob

$$2q^2r_0^2, \quad 2p^2r_0^2, \quad \frac{q^4r_0^4}{p^2}, \quad \frac{p^4r_0^4}{q^2}$$

zu vernachlässigen sind, liefern die Größen von p_0 und q_0 (und r_0), denn p und q sind sicher von derselben Größenordnung wie p_0 und q_0.

Führt man $p^2 = p_0^2$, $q^2 = q_0^2$ in 65) ein, so kommt[1]):

$$66)\quad p = \frac{p_0^3}{p_0^2 + q_0^2r_0^2}, \quad q = \frac{q_0^3}{q_0^2 + p_0^2r_0^2}, \quad r = \frac{r_0}{pq}.$$

Mit p, q, r hat man jetzt auch τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}. Nach 63) ist nämlich

$$67)\quad \tau_{11} = \frac{1}{i\pi}\log p, \quad \tau_{22} = \frac{1}{i\pi}\log q, \quad e^{\pm 2\pi i\tau_{12}} = \frac{r \pm \sqrt{r^2-4}}{2}.$$

Die Entscheidung über die Wahl der Vorzeichen in der letzten

[1]) In der v. Braunmühlschen Arbeit sind die entsprechenden Formeln offenbar durch kleine Druckfehler entstellt.

Gleichung von 67) gibt dabei der Quotient[1])

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}11\\00\end{bmatrix}(0,0)}{\vartheta\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}(0,0)},$$

der einerseits gleich $+\sqrt{\frac{\lambda\,\varkappa\,\mu_1}{\mu_\lambda\,\mu_\varkappa}}$, andererseits nahezu gleich

$$-\frac{e^{i\pi\frac{\tau_{12}}{2}}+e^{-i\pi\frac{\tau_{12}}{2}}}{e^{i\pi\frac{\tau_{12}}{2}}-e^{-i\pi\frac{\tau_{12}}{2}}}$$

ist.

2. Berechnung der α_{11}, α_{21}, α_{12}, α_{22}. Nach 46) besteht zwischen u, v und w_1, w_2 der Zusammenhang:

$$u = \alpha_{11}\,w_1 + \alpha_{21}\,w_2, \quad v = \alpha_{12}\,w_1 + \alpha_{22}\,w_2.$$

Daraus folgt in Verbindung mit 44):

$$68) \qquad \frac{\alpha_{11}+\alpha_{21}\,\sigma}{\alpha_{12}+\alpha_{22}\,\sigma} = -\frac{\frac{\partial}{\partial v}\left(\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,v)\right)}{\frac{\partial}{\partial u}\left(\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,v)\right)}.$$

In diese Relation kann man für σ Verzweigungswerte einsetzen und sich auf die Weise sechs lineare homogene Gleichungen für die α_{11}, α_{21}, α_{12}, α_{22} verschaffen. Nimmt man aus diesen zwei heraus (etwa die für $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ entstehenden) und verbindet sie mit den Gleichungen 56) und 57):

$$69) \qquad \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = -\frac{B_{k_1}-B_{k_2}}{A_{k_1}-A_{k_2}},$$

$$70) \qquad \frac{(k_1-k_2)\,s(a)}{(k_1-a)\,(k_2-a)} = \alpha_{11}\,(A_{k_1}-A_{k_2}) + \alpha_{12}\,(B_{k_1}-B_{k_2}),$$

für die man sich die A_{k_1}, A_{k_2}, B_{k_1}, B_{k_2}, die man ja auch sonst noch braucht, gemäß ihrer Definition zu berechnen hat (vergl. Abschnitt IV), so hat man eine genügende Anzahl von Gleichungen zur völligen Bestimmung von α_{11}, α_{21}, α_{12}, α_{22}.

3. Zur Berechnung von α und β sollen geeignete Relationen erst im nächsten Abschnitt aufgestellt werden.

---

[1]) s. Thomae, S. 13.

IV.

Die Lösung des vorgelegten Problems.

Die Gleichung 15) lieferte

$$71)\quad t = \pm \frac{b}{a\omega} \frac{\sqrt{(1+M)(1-\varepsilon^2 N^2)}}{(M-N)\sqrt{1-N}} \cdot \int_0^{\sigma} \frac{(1-\lambda^2\sigma)(1-\mu^2\sigma)\,d\sigma}{(a-\sigma)\sqrt{\sigma(1-\sigma)(1-\varkappa^2\sigma)(1-\lambda^2\sigma)(1-\mu^2\sigma)}}.$$

Nach 59) ergibt sich daher

$$72)\qquad t = \pm \mathfrak{C}\,(\log Q - \mathfrak{A}\,u - \mathfrak{B}\,v),$$

wo entsprechend den früher eingeführten Bezeichnungen

$$\mathfrak{A} = \frac{A_{\frac{1}{\mu^2}}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\right) - A_{\frac{1}{\lambda^2}}\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\right)}{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B_{\frac{1}{\mu^2}}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\right) - B_{\frac{1}{\lambda^2}}\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}\right)}{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}},$$

$$Q = \frac{\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u+\alpha,\ v+\beta)}{\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u-\alpha,\ v-\beta)}$$

gesetzt und

$$\mathfrak{C} = \frac{b}{a\omega} \cdot \frac{\sqrt{1+M}}{M-N} \cdot \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2N^2}}{\sqrt{1-N}} \cdot \frac{\sqrt{1-\lambda^2 a}\,\sqrt{1-\mu^2 a}}{\sqrt{a(1-a)(1-\varkappa^2 a)}}$$

ist.

Die Lösung des vorgelegten Problems ist dargestellt durch diese Beziehung 72) in Verbindung mit

$$73)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,\ v) = 0$$

und einer aus 43) resultierenden Relation, etwa

74)
$$\frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,\,v)}{\vartheta^2\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,\,v)} = \frac{\varkappa\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}\cdot\frac{1-\lambda^2\sigma}{1-\varkappa^2\sigma}.$$

Durch 72) und 73) sind nämlich u und v als Funktionen von t festgelegt und σ dann gemäß 74) als Funktion von t.

Praktisch ist allerdings die Auflösung von 72) und 73) nach u und v nicht durchführbar. Man wird aber zum Ziele kommen, d. h. numerische Rechnungen ausführen können, wenn man zunächst u und v als Funktionen von σ bestimmt und sodann t als Funktion von σ. Wenn man dies Verfahren einschlägt, kann natürlich von einer „Umkehrung" des Integrals 71) keine Rede sein. Eine solche [1]) ist mit den gegebenen Hilfsmitteln überhaupt unmöglich.

An einem Beispiele möge die Durchführung des eben angedeuteten Gedankenganges erläutert und die Brauchbarkeit der entwickelten Formeln auch für praktische Fälle gezeigt werden. Dabei sollen die Rechnungen so ausgeführt werden, daß eine Genauigkeit von drei Stellen erzielt wird.

Die Resultate wurden mit fünfstelligen Logarithmentafeln gewonnen. Von den damit erhaltenen fünf Stellen wurde die letzte nach etwaiger Aufrundung der vierten überall fortgelassen; die vierte Stelle wurde beibehalten, weil sie fast überall noch richtig ist.

Die im Abschnitt I eingeführten Konstanten seien (bei Zugrundelegung des cm-g-sec-Systems) folgendermaßen gewählt:

$$a = 5\cdot\sqrt{3}, \quad b = 10, \quad \dot{\varphi}_0 = 0,$$
$$\varphi_0 = -30^0, \quad g = 981, \quad \omega = 80.$$

Dann wird:

$$M = \frac{2gb}{a^2\omega^2} - \sin\varphi_0 = 0{,}5409, \qquad N = \sin\varphi_0 = -0{,}5,$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = 0{,}5$$

und damit:

---

[1]) vergl. Schirdewahn, Diss.

$$a = \frac{1+M}{M-N} = 1{,}4803\,, \quad \varkappa^2 = \frac{2}{1-N} \cdot \frac{M-N}{1+M} = 0{,}9007,$$

$$\lambda^2 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon N} \cdot \frac{M-N}{1+M} = 0{,}8106, \quad \mu^2 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon N} \cdot \frac{M-N}{1+M} = 0{,}4504.$$

Weiter folgt:

$$\varkappa_1^2 = 0{,}0993, \quad \lambda_1^2 = 0{,}1894, \quad \mu_1^2 = 0{,}5496,$$
$$\lambda_\varkappa^2 = 0{,}0901, \quad \mu_\varkappa^2 = 0{,}4503, \quad \mu_\lambda^2 = 0{,}3602,$$

und für A, B, C bekommt man:

$$A = \sqrt[4]{\frac{\varkappa_1^2\,\mu_1^2}{\lambda_1^2}} = 0{,}7327, \quad B = \sqrt[4]{\frac{\varkappa^2\,\mu_1^2\,\mu_\lambda^2}{\lambda^2\,\mu_\varkappa^2}} = 0{,}8360,$$

$$C = \sqrt[4]{\frac{\varkappa^2\,\varkappa_1^2\,\mu_\lambda^2}{\lambda^2\,\lambda_1^2\,\mu_\varkappa^2}} = 0{,}8262,$$

und daraus ergibt sich:

$$p_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-A-B+C}{1+A+B+C} = 0{,}03792,$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+A-B-C}{1+A+B+C} = 0{,}01037,$$

$$r_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-A+B-C}{1+A+B+C} = 0{,}04081.$$

Für p, q, r erhält man:

$$p = \frac{p_0^3}{p_0^2+q_0^2 r_0^2} = 0{,}03792, \quad q = \frac{q_0^3}{q_0^2+p_0^2 r_0^2} = 0{,}01015,$$

$$r = \frac{r_0}{pq} = 106{,}1.$$

Damit kommt weiter:

$$\tau_{11} = \frac{1}{i\pi} \log p = i \cdot 1{,}042, \qquad \tau_{22} = \frac{1}{i\pi} \log q = i \cdot 1{,}461,$$

$$\tau_{12} = \frac{i}{2\pi} \log \frac{r^2+\sqrt{r^2-4}}{2} = i \cdot 0{,}7423.$$

Alle sechzehn mit diesen Größen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gebildeten Thetareihen liefern für reelle u, v, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die Reihenwerte hinreichend genau, wenn man den Summationsindizes m_1 und m_2 die Werte -2 bis $+2$ beilegt. Auch von den

dadurch erhaltenen Reihengliedern lassen sich stets einige noch vernachlässigen. So bekommt man mit genügender Annäherung:

$$75_1)\quad \vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v) = 1 + 2p\cos 2\pi u + 2q\cos 2\pi v + 2pq\,e^{-2\pi i\tau_{12}}\cos(2u-2v)\pi + 2pq\,e^{2\pi i\tau_{12}}\cos(2u+2v)\pi + 2p^4 q\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(4u-2v)\pi + 2pq^4\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(2u-4v)\pi,$$

$$75_2)\quad \vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v) = 1 - 2p\cos 2\pi u + 2q\cos 2\pi v - 2pq\,e^{-2\pi i\tau_{12}}\cos(2u-2v)\pi - 2pq\,e^{2\pi i\tau_{12}}\cos(2u+2v)\pi + 2p^4 q\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(4u-2v)\pi - 2pq^4\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(2u-4v)\pi,$$

$$75_3)\quad \vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v) = 1 - 2p\cos 2\pi u - 2q\cos 2\pi v + 2pq\,e^{-2\pi i\tau_{12}}\cos(2u-2v)\pi + 2pq\,e^{2\pi i\tau_{12}}\cos(2u+2v)\pi - 2p^4 q\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(4u-2v)\pi - 2pq^4\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(2u-4v)\pi,$$

$$75_4)\quad \vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v) = 1 + 2p\cos 2\pi u - 2q\cos 2\pi v - 2pq\,e^{-2\pi i\tau_{12}}\cos(2u-2v)\pi - 2pq\,e^{2\pi i\tau_{12}}\cos(2u+2v)\pi - 2p^4 q\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(4u-2v)\pi + 2pq^4\,e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(2u-4v)\pi.$$

Bildet man daraus: 76)

$$P(u,v)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)-\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)-\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)},$$

$$Q(u,v)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)-\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)-\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)},$$

$$R(u,v)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)-\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)-\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(u,v)+\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(u,v)},$$

so folgt:

$$P(u,v)=p\cos 2\pi u+pq^4 e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(2u-4v)\pi,$$

$$Q(u,v)=q\cos 2\pi v+p^4q\, e^{-4\pi i\tau_{12}}\cos(4u-2v)\pi,$$

$$R(u,v)=pq\, e^{-2\pi i\tau_{12}}\cos(2u-2v)\pi+pq\, e^{2\pi i\tau_{12}}\cos(2u+2v)\pi.$$

Dafür läßt sich auch schreiben:

$$P(u,v)=p\cos 2\pi u+pq^4 e^{-4\pi i\tau_{12}}[\cos 2\pi u\,(2\cos^2 2\pi v-1)+2\sin 2\pi u\sin 2\pi v\cos 2\pi v],$$

$$Q(u,v)=q\cos 2\pi v+p^4q\, e^{-4\pi i\tau_{12}}[(2\cos^2 2\pi u-1)\cos 2\pi v+2\sin 2\pi u\sin 2\pi v\cos 2\pi u],$$

$$R(u,v)=pq\left[\cos 2\pi u\cos 2\pi v\left(e^{-2\pi i\tau_{12}}+e^{2\pi i\tau_{12}}\right)+\sin 2\pi u\sin 2\pi v\left(e^{-2\pi i\tau_{12}}-e^{2\pi i\tau_{12}}\right)\right].$$

Kann man — wie im vorliegenden Falle — $e^{2\pi i\tau_{12}}$ gegen $e^{-2\pi i\tau_{12}}$ vernachlässigen, so wird einfacher

$$R(u,v)=pq\, e^{-2\pi i\tau_{12}}[\cos 2\pi u\cos 2\pi v+\sin 2\pi u\sin 2\pi v].$$

Substituiert man jetzt für einen Augenblick

$$\cos 2\pi u = \xi_1, \quad \cos 2\pi v = \eta_1$$

und setzt dann den aus der letzten Gleichung (der für R (u, v)) für $\sin 2\pi u \sin 2\pi v$ resultierenden Wert in die beiden ersten (die für P (u, v) und Q (u, v)) ein, so ergibt sich:

$$P(u,v) = p\,\xi_1 + pq^4 e^{-4\pi i \tau_{12}} \left\{ \xi_1 (2\eta_1^2 - 1) + 2\eta_1 \left(\frac{R(u,v)}{pq\, e^{-2\pi i \tau_{12}}} - \xi_1 \eta_1 \right) \right\} = \xi_1 \left(p - pq^4 e^{-4\pi i \tau_{12}} \right) + \eta_1 2q^3 e^{-2\pi i \tau_{12}} R(u,v),$$

$$Q(u,v) = q\,\eta_1 + p^4 q e^{-4\pi i \tau_{12}} \left\{ \eta_1 (2\xi_1^2 - 1) + 2\xi_1 \left(\frac{R(u,v)}{pq\, e^{-2\pi i \tau_{12}}} - \xi_1 \eta_1 \right) \right\} = \xi_1 2p^3 e^{-2\pi i \tau_{12}} R(u,v) + \eta_1 \left(q - p^4 q e^{-4\pi i \tau_{12}} \right).$$

Aus diesen beiden in $\xi_1 = \cos 2\pi u$ und $\eta_1 = \sin 2\pi v$ linearen Gleichungen findet man: 77)

$$\cos 2\pi u = \frac{1}{p} \cdot \frac{\left[1 - p^4 e^{-4\pi i \tau_{12}}\right] P(u,v) - 2q^2 e^{-2\pi i \tau_{12}} R(u,v)\, Q(u,v)}{\left[1 - p^4 e^{-4\pi i \tau_{12}}\right]\left[1 - q^4 e^{-4\pi i \tau_{12}}\right] - 4p^2 q^2 e^{-4\pi i \tau_{12}} R^2(u,v)},$$

$$\cos 2\pi v = \frac{1}{q} \cdot \frac{\left[1 - p^4 e^{-4\pi i \tau_{12}}\right] Q(u,v) - 2p^2 e^{-2\pi i \tau_{12}} R(u,v)\, P(u,v)}{\left[1 - p^4 e^{-4\pi i \tau_{12}}\right]\left[1 - q^4 e^{-4\pi i \tau_{12}}\right] - 4p^2 q^2 e^{-4\pi i \tau_{12}} R^2(u,v)}.$$

Für P (u, v), Q (u, v), R (u, v) entnimmt man aus dem Formelsystem 43):

$$78) \quad \begin{cases} P(u,v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - A_1(\sigma) - B_1(\sigma) + C_1(\sigma)}{1 + A_1(\sigma) + B_1(\sigma) + C_1(\sigma)}, \\ Q(u,v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + A_1(\sigma) - B_1(\sigma) - C_1(\sigma)}{1 + A_1(\sigma) + B_1(\sigma) + C_1(\sigma)}, \\ R(u,v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - A_1(\sigma) + B_1(\sigma) - C_1(\sigma)}{1 + A_1(\sigma) + B_1(\sigma) + C_1(\sigma)}, \end{cases}$$

wenn $A_1(\sigma)$, $B_1(\sigma)$, $C_1(\sigma)$ der Reihe nach als Abkürzungen stehen für

$$78') \quad \sqrt{\frac{\varkappa_1 \mu_1 (1 - \lambda^2 \sigma)}{\lambda_1 (1 - \varkappa^2 \sigma)(1 - \mu^2 \sigma)}}, \sqrt{\frac{\varkappa \mu_1 \mu_\lambda}{\lambda \mu_\varkappa (1 - \mu^2 \sigma)}}, \sqrt{\frac{\varkappa \varkappa_1 \mu_\lambda (1 - \lambda^2 \sigma)}{\lambda \lambda_1 \mu_\varkappa (1 - \varkappa^2 \sigma)}}.$$

Die Wurzeln sind dabei positiv zu nehmen.

In 77) und 78) sind jetzt cos 2πu und cos 2πv und damit u und v als Funktionen von σ ermittelt. Die Methode, die hierzu führte, ist in ihrer einfachsten Ausführung schon von Thomae[1]) angegeben worden.

Zur Berechnung von α und β kann man die eben gefundene Beziehung 77), die im Allgemeinen nur für reelle u, v einwandfrei ist, ebenfalls anwenden:

Im vorliegenden speziellen Falle war a = 1,4803, d. h. es ist (wie immer, wenn $-1 < N < M < 1$):

$$\frac{1}{\lambda^2} < a < \frac{1}{\mu^2}.$$

Setzt man daher

$$79)\quad \begin{cases} \alpha = \int_0^a du = \int_0^{\frac{1}{\mu^2}} du + \alpha' = \frac{1}{2} + \frac{\tau_{11}}{2} + \alpha', \quad \alpha' = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^a du, \\ \beta = \int_0^a dv = \int_0^{\frac{1}{\mu^2}} dv + \beta' = -\frac{1}{2} + \frac{\tau_{12}}{2} + \beta', \quad \beta' = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^a dv, \end{cases}$$

so sind α′ und β′ positiv rein imaginär, und zwar ist

$$|\alpha'| < \frac{|\tau_{12}|}{2}, \qquad |\beta'| < \frac{|\tau_{22}|}{2}.$$

Diese beiden rohen Abschätzungen ermöglichen bereits festzustellen, daß die Gleichungen 77) und 78) für cos 2πα′ und cos 2πβ′ wenigstens der Größenordnung nach richtige Werte liefern, und mit diesen weiter, daß die Vernachlässigungen, die zur Herleitung von 77) notwendig waren, auch in diesem Falle erlaubt sind, sodaß also jene Werte für cos 2πα′ und cos 2πβ′ den gestellten Genauigkeitsanforderungen genügen.

Nach dem System 43) und der Relation 30) gilt wegen 79):

---

[1]) s. Thomae, S. 12 und S. 20. Die dort entwickelten Formeln sind in 77) als Spezialfall enthalten.

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(\alpha,\beta)}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}(\alpha,\beta)} = \frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}\left(\alpha'+g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix},\beta'+h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\left(\alpha'+g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix},\beta'+h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)}$$

$$= i\cdot\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}(\alpha',\beta')}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(\alpha',\beta')} = i\cdot\sqrt{\frac{\varkappa_1\mu_\lambda(a-1)}{\lambda_1\mu_1\mu_\varkappa a}},$$

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}(\alpha,\beta)}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}(\alpha,\beta)} = \frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}\left(\alpha'+g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix},\beta'+h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\left(\alpha'+g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix},\beta'+h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)}$$

$$= i\cdot\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}(\alpha',\beta')}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(\alpha',\beta')} = i\cdot\sqrt{\frac{\varkappa(a-1)(\lambda^2a-1)}{\lambda\mu_1 a(\varkappa^2a-1)}},$$

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}(\alpha,\beta)}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}(\alpha,\beta)} = \frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}\left(\alpha'+g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix},\beta'+h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\left(\alpha'+g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix},\beta'+h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)}$$

$$= \frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')}{\vartheta\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}(\alpha',\beta')} = \sqrt{\frac{\varkappa\varkappa_1(\lambda^2a-1)}{\lambda\lambda_1(\varkappa^2a-1)}},$$

wobei die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Damit kommt: 80)

$$\cos 2\pi\alpha' = \frac{1}{p}\cdot\frac{\left[1-p^4e^{-4\pi i\tau_{12}}\right]P(\alpha',\beta')-2q^2e^{-2\pi i\tau_{12}}R(\alpha',\beta')Q(\alpha',\beta')}{\left[1-p^4e^{-4\pi i\tau_{12}}\right]\left[1-q^4e^{-4\pi i\tau_{12}}\right]-4p^2q^2e^{-4\pi i\tau_{12}}R^2(\alpha',\beta')},$$

$$\cos 2\pi\beta' = \frac{1}{q}\cdot\frac{\left[1-q^4e^{-4\pi i\tau_{12}}\right]Q(\alpha',\beta')-2p^2e^{-2\pi i\tau_{12}}R(\alpha',\beta')P(\alpha',\beta')}{\left[1-p^4e^{-4\pi i\tau_{12}}\right]\left[1-q^4e^{-4\pi i\tau_{12}}\right]-4p^2q^2e^{-4\pi i\tau_{12}}R^2(\alpha',\beta')},$$

wobei jetzt:

$$81)\quad \begin{cases} P(\alpha',\beta') = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-A_2(a)-B_2(a)+C_2(a)}{1+A_2(a)+B_2(a)+C_2(a)}, \\ Q(\alpha',\beta') = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+A_2(a)-B_2(a)-C_2(a)}{1+A_2(a)+B_2(a)+C_2(a)}, \\ R(\alpha',\beta') = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-A_2(a)+B_2(a)-C_2(a)}{1+A_2(a)+B_2(a)+C_2(a)}, \end{cases}$$

wenn

$$81')\quad A_2(a) = \sqrt{\frac{\varkappa_1\mu_\lambda(a-1)}{\lambda_1\mu_1\mu_\varkappa a}},\quad B_2(a) = \sqrt{\frac{\varkappa(a-1)(\lambda^2 a-1)}{\lambda\mu_1 a(\varkappa^2 a-1)}},$$

$$C_2(a) = \sqrt{\frac{\varkappa\varkappa_1(\lambda^2 a-1)}{\lambda\lambda_1(\varkappa^2 a-1)}}.$$

Nach Berechnung der α', β' lassen sich jetzt auch $A_{\frac{1}{\lambda^2}}$, $A_{\frac{1}{\mu^2}}$, $B_{\frac{1}{\lambda^2}}$, $B_{\frac{1}{\mu^2}}$ ermitteln. Man hat dazu: 82)

$$A_{\frac{1}{\lambda^2}} = 2\cdot\frac{\partial\log\vartheta\left(\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix}\right)(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} =$$

$$2\cdot\frac{\partial\log\vartheta\begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}\left(g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}+\alpha', h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}+\beta'\right)}{\partial\alpha'} = -2\pi i + 2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')\right\}}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')},$$

$$A_{\frac{1}{\mu^2}} = 2\cdot\frac{\partial\log\vartheta\left(\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\right)(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} =$$

$$2\cdot\frac{\partial\log\vartheta\begin{bmatrix}01\\10\end{bmatrix}\left(g\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}+\alpha', h\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}+\beta'\right)}{\partial\alpha'} = -2\pi i + 2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')\right\}}{\vartheta\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')},$$

$$B_{\frac{1}{\lambda^2}} = 2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\beta'}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')\right\}}{\vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')},\qquad B_{\frac{1}{\mu^2}} = 2\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\beta'}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')\right\}}{\vartheta\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta')}.$$

Die für die Rechnungen noch nötigen Thetafunktionen sind — mit genügender Genauigkeit entwickelt — diese:

$$83_1) \quad \vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,v) = 2q^{\frac{1}{4}}\Big\{\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v$$
$$+ p\, e^{\pi i \tau_{12}} \sin(2u+v)\,\pi$$
$$- p\, e^{-\pi i \tau_{12}} \sin(2u-v)\,\pi$$
$$+ pq^2 e^{-3\pi i \tau_{12}} \sin(2u-3v)\,\pi$$
$$- p^4 e^{-2\pi i \tau_{12}} \sin(4u-v)\,\pi$$
$$+ p^4 q^2 e^{-6\pi i \tau_{12}} \sin(4u-3v)\,\pi\Big\},$$

$$83_2) \quad \vartheta\begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta') = 2p^{\frac{1}{4}}\Big\{\cos \pi\alpha' + p^2 \cos 3\pi\alpha'$$
$$- q\, e^{\pi i \tau_{12}} \cos(\alpha'+2\beta')\,\pi$$
$$- q\, e^{-\pi i \tau_{12}} \cos(\alpha'-2\beta')\,\pi$$
$$- p^2 q\, e^{-3\pi i \tau_{12}} \cos(3\alpha'-2\beta')\,\pi$$
$$+ q^4 e^{-2\pi i \tau_{12}} \cos(\alpha'-4\beta')\,\pi$$
$$+ p^2 q^4 e^{-6\pi i \tau_{12}} \cos(3\alpha'-4\beta')\,\pi\Big\},$$

$$83_3) \quad \vartheta\begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}(\alpha',\beta') = 2p^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}}\, e^{\pi i \frac{\tau_{12}}{2}}\Big\{\sin(\alpha'+\beta')\,\pi$$
$$- e^{-\pi i \tau_{12}} \sin(\alpha'-\beta')\,\pi$$
$$+ q^2 e^{-2\pi i \tau_{12}} \sin(\alpha'-3\beta')\,\pi$$
$$- q^2 e^{\pi i \tau_{12}} \sin(\alpha'+3\beta')\,\pi$$
$$+ p^2 q^2\, e^{-5\pi i \tau_{12}} \sin(3\alpha'-3\beta')\pi$$
$$- p^2 e^{-2\pi i \tau_{12}} \sin(3\alpha'-\beta')\,\pi$$
$$+ p^2 e^{\pi i \tau_{12}} \sin(3\alpha'+\beta')\,\pi\Big\},$$

$$83_4)\quad \vartheta\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}(U,V) = 2p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}e^{\pi i\frac{\tau_{12}}{2}}\Big\{\sin(U+V)\pi$$
$$+ e^{-\pi i\tau_{12}}\sin(U-V)\pi$$
$$+ q^2 e^{-2\pi i\tau_{12}}\sin(U-3V)\pi$$
$$+ q^2 e^{\pi i\tau_{12}}\sin(U+3V)\pi$$
$$- p^2q^2 e^{-5\pi i\tau_{12}}\sin(3U-3V)\pi$$
$$- p^2 e^{-2\pi i\tau_{12}}\sin(3U-V)\pi$$
$$- p^2 e^{\pi i\tau_{12}}\sin(3U+V)\pi\Big\}.$$

In der letzten Gleichung sind U, V bezw. gleich

$$u+\alpha', v+\beta' \quad \text{und} \quad u-\alpha', v-\beta'$$

zu setzen. Man braucht sie bei der Berechnung von

$$84)\quad Q = \frac{\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u+\alpha, v+\beta)}{\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u-\alpha, v-\beta)} = e^{-2\pi iu}\cdot\frac{\vartheta\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}(u+\alpha', v+\beta')}{\vartheta\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}(u-\alpha', v-\beta')}.$$

Im gewählten Spezialfalle wird

$$\cos 2\pi\alpha' = 2{,}979, \qquad \alpha' = i\cdot 0{,}2793,$$
$$\cos 2\pi\beta' = 5{,}877, \qquad \beta' = i\cdot 0{,}3910,$$
$$A_{\frac{1}{\lambda^2}} = -i\cdot 13{,}28, \qquad A_{\frac{1}{\mu^2}} = i\cdot 0{,}2191,$$
$$B_{\frac{1}{\lambda^2}} = i\cdot 2{,}914, \qquad B_{\frac{1}{\mu^2}} = -i\cdot 12{,}92.$$

Man kann hier eine Probe auf die Richtigkeit der Rechnung machen, indem man (vergl. 68))

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = -\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,v)\right\}}{\frac{\partial}{\partial u}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}(u,v)\right\}}\right]\left(u=\frac{\tau_{11}}{2}, v=\frac{\tau_{12}}{2}\right)$$

berechnet und mit (vergl. 69))

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = -\frac{B_{\frac{1}{\lambda^2}} - B_{\frac{1}{\mu^2}}}{A_{\frac{1}{\lambda^2}} - A_{\frac{1}{\mu^2}}}$$

vergleicht. Man findet (hier sei das fünfstellig erhaltene Resultat angegeben):

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} \text{ bezw. } = 1{,}1725 \text{ und } = 1{,}1727.$$

Innerhalb der vorgeschriebenen Genauigkeit besteht also beste Uebereinstimmung.

Von den α_{11}, α_{21}, α_{12}, α_{22} braucht man nur die beiden Quotienten $\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}$ und $\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}$. Diese ergeben sich zu

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = -1{,}167, \quad \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = -0{,}7581.$$

Die Konstanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ haben diese Werte:

$$\mathfrak{A} = -\,i \cdot 19{,}79, \quad \mathfrak{B} = i \cdot 3{,}989, \quad \mathfrak{C} = i \cdot 0{,}007218,$$

sodaß also

$$t = \pm i \cdot 0{,}007218\,[\log Q + 19{,}79\ u - 3{,}989\ v].$$

Zu jedem σ läßt sich jetzt das zugehörige t ermitteln. In der folgenden Tabelle sind für zehn verschiedene, um $\frac{1}{10}$ fort-

σ	u	v	t	φ
0	0	0	0	— 30°
0,1	0,0888	0,0489	0,00586	— 27,63°
0,2	0,1290	0,0694	0,00863	— 24,95°
0,3	0,1627	0,0852	0,01105	— 21,90°
0,4	0,1940	0,0985	0,01340	— 18,35°
0,5	0,2249	0,1097	0,01585	— 14,18°
0,6	0,2567	0,1189	0,01852	— 9,16°
0,7	0,2909	0,1247	0,02164	— 2,95°
0,8	0,3300	0,1251	0,02557	+ 5,05°
0,9	0,3798	0,1223	0,03126	+ 15,99°
1,0	0,5	0	T = 0,04873	+ 32,75°

schreitende, von 0 bis 1 wachsende Werte von σ die entsprechenden t und die gemäß der Substitution

85) $$\varphi = \arcsin \frac{\sigma + \alpha N}{\alpha - \sigma}$$

dem σ jeweils zugehörige exzentrische Anomalie φ, die in 1) als Parameter eingeführt wurde, angegeben. Der Vollständigkeit halber sind jedesmal die Werte der Normalintegrale u, v hinzugefügt.

Dem $\sigma = 1$ entspricht eine „Schwingungsdauer" T des auf der rotierenden Ellipse beweglichen schweren Punktes P, wenn man als solche die Zeit bezeichnet, die P braucht, um aus der Anfangslage ($\sigma = 0$) zum nächsten Rückkehrpunkt ($\sigma = 1$) zu gelangen. Für T findet man aus 72) direkt die Darstellung

86) $$T = \pm \mathfrak{C}\left(-\pi i - \frac{1}{2}\mathfrak{A}\right).$$

Das Vorzeichen ist dabei noch so zu wählen, daß $T > 0$ wird.

Der Fall I α der sechs in 11) unterschiedenen Möglichkeiten in der Größenverteilung der Werte von $-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, -1, +1, M, N$ untereinander ist damit vollständig durchgeführt worden. Eine ganz entsprechende Behandlung wäre jetzt noch notwendig für die übrigen fünf Fälle. Sie erübrigt sich aber, da sich in jedem Falle das Integral 12) durch eine lineare Substitution einer neuen Variabeln auf eine der Form 15) analoge Form bringen läßt (vergl. S. 10). Nachdem man diese dann hat, gelten die Resultate der Abschnitte II, III und im Wesentlichen auch IV genau ebenso wie für den gelösten auch für die früher ausgeschiedenen Fälle von 11), nur haben die Symbole σ, α, $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 jedesmal andere Bedeutungen. Bei der Wahl der Substitutionen ist zu berücksichtigen, daß es zweckmäßig ist, vor allem die Rechnungen wesentlich erleichtert, daß das Integral in dem Intervall, in dem man es braucht, reelle Werte liefert.

Das Problem eines auf einer um ihre vertikale große Hauptachse rotierenden Ellipse frei beweglichen, nur der Schwere unterworfenen Punktes ist damit — abgesehen von den ausgeschlossenen speziellen Fällen — völlig gelöst.

Lebenslauf.

Am 6. Oktober 1905 wurde ich in Bremen-Burg als Sohn des Lehrers Johann Heinrich Uchtmann geboren. Ich besitze die bremische Staatsangehörigkeit und bin evangelischer Konfession. Von Ostern 1912 bis Ostern 1915 besuchte ich die Volksschule in Grambke bei Bremen und trat dann in das Realgymnasium zu Bremen ein, das ich Ostern 1924 mit dem Reifezeugnis verließ. Anschließend studierte ich Mathematik, angewandte Mathematik, Geographie und Physik, zunächst zwei Semester in Hamburg und dann acht in Marburg. Das Rigorosum bestand ich am 16. Mai 1929.

Meine Lehrer waren in Hamburg die Herren: Artin, Behnke, Koch, Passarge, Schulz; in Marburg die Herren: Berek, Doering, Fraenkel, Grüneisen, Hagen, Hensel, Jaeck, Jaensch, Krafft, Luckey, Mannhardt, Neumann, Schaefer, Schultze-Jena, Schulze, Schwantke, Senftleben, Tomaschek, Wedekind, Zühlke. Ihnen allen bin ich für die reichen Anregungen, die sie mir gaben, dankbar.

Insbesondere fühle ich mich Herrn Professor Dr. E. R. Neumann, auf dessen Rat ich mich mit der vorliegenden Arbeit beschäftigte und dessen Unterstützung ich bei ihrer Durchführung stets fand, zu herzlichem Dank verpflichtet.

Hermann Uchtmann.